HORS COMMERCE

TIRAGE A PART

INTERNATIONAL UNION OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

DYNAMICS OF SATELLITES
DYNAMIQUE DES SATELLITES

SYMPOSIUM PARIS, MAY 28-30, 1962
EDITED BY MAURICE ROY

SPRINGER-VERLAG, BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG 1963

Sur l'évolution des systèmes planétaires

Par

Albert M. Moltchanov

Institut Steklov de Mathématiques Moscou, U.S.S.R.

Introduction

Il sera question dans ce rapport de la possibilité d'étudier le comportement des systèmes planétaires au long de nombreuses fois la durée d'une révolution autour d'un astre central. Il y sera démontré que l'on peut exprimer l'équation définissant les lentes variations des paramètres de l'orbite, sans intervention d'aucune variable rapide, déterminant le mouvement orbital. Il en résulte que les orbites planes et circulaires apparaissent stationnaires, dans le terme principal. Ce théorème fait prévoir que même un système primitivement non plan doit le devenir par le processus d'évolution. Mais des facteurs dissipatifs, indispensables à l'évolution, n'entrent pas, à proprement parler, dans les équations de la mécanique céleste. D'où la réflexion suivante: déjà, dans les limites de la mécanique céleste, on voit qu'une décomposition du système est possible, lorsqu'une partie des planètes quitte le système en question et se rattache à des orbites hyperboliques. Ainsi, la possibilité d'une évolution (il est vrai, aux dépens de la décomposition) est déjà contenue dans les équations de la mécanique céleste. De même, il faut prendre note que, sur des périodes longues, même avec des facteurs dissipatifs petits (par exemple, sur le Soleil, des phénomènes de marées), des phénomènes minimes peuvent jouer un rôle essentiel.

De là, on peut concevoir la perspective suivante: les équations de la Mécanique céleste déterminent des états stationnaires du système planétaire — les orbites planes circulaires. Toutefois, pour obtenir de tels états, il est indispensable d'avoir des facteurs dissipatifs petits. Un intéressant problème se trouve posé, celui de l'énumération systématique de tous les phénomènes dissipatifs. Bien entendu, il se peut qu'ils soient tous trop petits pour assurer l'obtention d'un régime stationnaire, durant la durée d'existence du système solaire. Il restera alors une possibilité alternative et mettre: le système solaire est plan, étant donné qu'il l'était depuis le moment de son apparition.

Comme nous venons déjà de le dire, au cours de l'étude de l'évolution, on peut se dispenser de faire les vérifications des équations fondamentales si l'on examine les systèmes pouvant se décomposer. Cette question est intéressante en elle-même, car elle peut trouver des applications dans le problème relatif à la décomposition des associations stellaires.

§ 1. Théorème sur la division des mouvements

Tous les énoncés qui suivent sont basés sur le théorème relatif à la théorie des oscillations dont l'expression est indiquée ci-dessous. En raison du manque de place, la démonstration n'en sera pas donnée.

Etudions le système des équations différentielles, comprenant le petit paramètre ε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \varepsilon F(J, \Phi, \varepsilon), \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \omega(J) + \varepsilon\, \Omega(J, \Phi, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ici $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_l)$ sont variables de phase (les fonctions F et Ω sont périodiques par rapport à Φ_i avec une période 2π), $J = (J_1, \ldots, J_m)$ est le système des intégrales premières du mouvement de non-perturbation.

Le théorème se rapportant à la division des mouvements, pour un tel système, se formule de la façon suivante:
il existe un changement de variables:

$$J = I + \varepsilon P(I, \Phi, \varepsilon), \tag{2}$$

tel que l'équation en I s'exprime sans variables de phase:

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon G(I, \varepsilon). \tag{3}$$

A l'heure actuelle, l'auteur ne connaît pas dans sa totalité la démonstration de ce théorème, elle est seulement limitée à quelques suppositions. La principale limitation (excepté les suppositions concernant l'uniformité, peu importantes) se trouve dans le fait que pour l'instant le théorème n'est démontré que pour une zone environnant un point *non-singulier*. De façon plus précise, examinons la valeur moyenne de la fonction F lorsque $\varepsilon = 0$:

$$F_0(I) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F(I, \Phi, 0)\, d\Phi_1 \ldots d\Phi_l. \tag{4}$$

Le théorème est démontré pour n'importe quel point I tel que $F_0(I) \neq 0$. Il est vrai que, dans ce cas-là, il nous est permis de démontrer en outre — et ceci est très important pour les applications — que le terme principal de l'équation de l'évolution coïncide avec $F_0(I)$:

$$G(I, 0) = F_0(I). \tag{5}$$

Remarquons que la formule (4) montre pourquoi la méthode habituelle, utilisée pour former la moyenne, ne peut être appliquée aux oscillations fréquentes. En effet, en général, on examine la moyenne de la trajectoire, ce qui selon le théorème de l'ergodicité ne coincide avec la moyenne spatiale que pour les points où les fréquences ne peuvent être mesurées. C'est pourquoi la moyenne temporelle, au contraire de la moyenne spatiale (4), constitue la fonction discontinue I dans tous les points I où les fréquences sont mesurées, c'est-à-dire sur un ensemble dense partout.

En ce qui concerne la fonction P dans la formule (2), l'auteur, jusqu'à présent, n'a pu en établir qu'une évaluation très rudimentaire:

$$|P(I, \Phi, \varepsilon)| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{6}$$

Une semblable évaluation est raisonnable aux environs d'un point stationnaire de résonance I, et doit être remplacée simplement par une limite P dans n'importe quel autre point.

L'évaluation (6) montre même que le problème des plus petits dénominateurs, dans la théorie des oscillations (en particulier, dans la mécanique céleste), apparaît à cause d'une forme malencontreuse de la théorie des perturbations — désagrégation en série, par degrés du petit paramètre ε.

Cette désagrégation a une signification dans le cadre de délais limités, alors que dans des délais $t \sim 1/\varepsilon$, ou davantage encore $t \sim 1/\varepsilon^2$ le processus de la désagrégation en série par degrés de ε équivant à une désagrégation en une série de fonctions ayant une singularité importante. Si l'on utilisait la méthode rationelle des approximations successives, aucun plus petit dénominateur n'apparaîtrait alors. On l'aperçoit très clairement si l'on écrit l'équation aux dérivées partielles qui détermine la fonction P:

$$\frac{\partial P}{\partial \Phi}[\omega(I + \varepsilon P) + \varepsilon \Omega] + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial I} G(I, \varepsilon) = F(I + \varepsilon P, \Phi, \varepsilon) - G(I, \varepsilon).$$

Si l'on élimine tous les termes comprenant ε, on obtient un premier rapprochement avec la théorie classique des perturbations, où apparaît le problème des plus petits dénominateurs. Mais, il suffit de remplacer dans le terme contenant $\partial P/\partial I$ le coefficient $G(I, \varepsilon)$ par $F_0(I)$ conformément à (5) pour faire disparaître le problème des plus petits dénominateurs. Il en ressort, en somme, que l'évaluation (6) est très rudimentaire.

Présentons encore une remarque de caractère terminologique.

Le système (3) est tout naturellement désigné comme «évolutif» par rapport au système (1), étant donné qu'il décrit des changements lents, se produisant à une vitesse ε. Le sens de la formule (2) se résume en ceci qu'elle montre comment se comportent les intégrales J du mouvement de non-perturbation, lorsqu'une perturbation est mise en jeu. On voit alors que, lors du fonctionnement doux des paramètres I qui évoluent (pour des périodes $t \sim 1/\varepsilon$), il se superpose une vibration de moindre amplitude εP, mais de haute fréquence, car il entre en P des variables rapides Φ.

Il faut souligner que l'application du théorème sur la division des mouvements conduit à étudier le système (1) à partir du système (3), qui est de degré moins élevé puisqu'il n'y entre pas de Φ à phases variables. Si l'on introduit un temps « lent » $\tau = \varepsilon t$, alors le système d'évolution (3) peut être mis sous la forme suivante, après avoir supprimé l'égalité (5):

$$\frac{dI}{d\tau} = F_0(I) + \varepsilon G_1(I, \varepsilon). \tag{7}$$

Ce système, comme celui sur lequel il est basé, comprend un petit paramètre ε. Son comportement fondamental est représenté par le terme $F_0(I)$, et des périodes de l'ordre de $\tau \sim 1$ y correspondent à $t \sim 1/\varepsilon$.

Ecrivons l'équation de « non-perturbation » pour le système (7):

$$\frac{dI}{d\tau} = F_0(I). \tag{8}$$

Le système (8) peut avoir, en général, des points stationnaires stables. Soit I_0 un tel point. Alors, n'importe quelle trajectoire issue d'un point assez voisin de I_0 tendra avec l'écoulement du temps à venir en I_0. Lorsqu'en particulier le régime devient stationnaire, il y a une évolution du système.

Ensuite, il peut se produire qu'une partie seulement des paramètres composant I tende vers la limite, alors que l'autre partie, ou même tous les paramètres, accomplissent un mouvement presque périodique. En prenant pour nouvelles variables le système des intégrales premières et les variables de phase de l'équation (8), nous mettrons dans ce cas le système (7) sous la forme (1), toutefois avec un nombre réduit de variables.

Le théorème sur la division des mouvements nous permet, de cette façon, en principe à la suite d'un nombre donné de démarches, soit de trouver un régime stationnaire vers lequel le système tend à évoluer, soit d'en décrire le mouvement sous forme de superposition de mouvements presque périodiques, qui se produisent avec des vitesses brusquement différentes $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots$, correspondant à l'échelle des temps $1, 1/\varepsilon, 1/\varepsilon^2, \ldots$.

Signalons que le nombre des démarches dans ce processus n'est pas supérieur à la dimension du système, étant donné qu'à chaque démarche une variable sort du jeu, soit pour le compte de la tendance vers la limite, soit pour le compte d'un terme moyen.

Il est important de remarquer que la nature de l'équation de l'évolution est déterminée par le terme $F_0(I)$, dont la recherche n'exige pas de connaître les changements de variables (2). Remarquons de même que, pour le théorème sur la division des mouvements, il faut seulement que les variables Φ forment un ensemble d'ergodicité en présence de presque tous les points I. Dans ce cas plus général, il suffit de remplacer la formule (4) par sa généralisation naturelle:

$$F_0(I) = \int_{\mathfrak{M}(I)} F(I, \Phi, 0)\, d\mu(\Phi), \tag{9}$$

où $\mu(\Phi)$ indique une mesure invariante sur un ensemble d'ergodicité $\mathfrak{M}(I)$.

Si, toutefois, la première démarche ne met pas en évidence les paramètres qui subissent des évolutions, il serait nécessaire, avant d'effectuer la démarche suivante, de trouver un changement des variables, ce qui exige de résoudre l'équation aux dérivées partielles. Une économie de travail particulièrement notable est procurée par la remarque suivante: un changement des variables n'a pas besoin d'être recherché avec trop de précision, il suffit de le trouver avec une précision de l'ordre ε^2 pour la première démarche, de l'ordre de ε^3 pour la seconde, et ainsi de suite.

§ 2. Problème concernant le système planétaire

Il est aisé de vérifier que, selon une notation adimensionnelle, les équations de système « n » des planètes peuvent être exprimées, dans le système héliocentrique de coordonnées, de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_i}{dt} &= -\frac{\bar{r}_i}{r_i^3} + \varepsilon \sum_{\varkappa \neq i} \Theta_\varkappa \left[\frac{\bar{r}_\varkappa - \bar{r}_i}{|\bar{r}_\varkappa - \bar{r}_i|^3} - \frac{\bar{r}_\varkappa}{r_\varkappa^3} + \frac{\bar{r}_i}{r_i^3}\right], \\ \frac{d\bar{r}_i}{dt} &= \bar{u}_i. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ici, le petit paramètre désigné par ε, soit:

$$\varepsilon = \frac{m_1 + \cdots + m_n}{m_0 + m_1 + \cdots + m_n}, 0 \tag{11}$$

représente le rapport de la masse de toutes les planètes à la masse entière du système (m_0 — masse du corps central), alors que

$$\Theta_\varkappa = \frac{m_\varkappa}{m_1 + \cdots + m_n} \tag{12}$$

représente la part $\varkappa$ d'une planète dans la masse de l'ensemble des planètes.

Remarquons que, pour le système solaire:

$$\varepsilon = 1{,}34 \cdot 10^{-3},$$

et que, pour le système des satellites de Jupiter:

$$\varepsilon = 4{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

Afin de pouvoir appliquer le théorème § 1. au système (10), il faut exprimer celui-ci au moyen de nouvelles variables. Pour celles-ci, il est commode de choisir des moments spécifiques de la quantité de mouvement des planètes, vecteurs dirigés vers le péricentre de l'orbite. Ayant complété le système des intégrales premières du mouvement de non-perturbation à l'aide de variables de phase, nous obtiendrons la possibilité de ramener le système (10) à la forme (1).

A titre d'exemple, voici les formules de passage aux nouvelles variables (une lettre non surlignée désigne le module du vecteur correspondant):

$$\left.\begin{aligned} \bar{L}_i &= \bar{r}_i \times \bar{u}_i, \\ \bar{a}_i &= \left(u_i^2 - \frac{1}{r_i}\right)\bar{r}_i - (\bar{r}_i,\, \bar{u}_i)\,\bar{u}_i, \\ \cos\varphi_i &= \frac{1}{r_i a_i}(\bar{r}_i,\, \bar{a}_i). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Il faut signaler que $\bar{L}_i$ et $\bar{a}_i$ sont corrélés par $(\bar{L}_i,\, \bar{a}_i) = 0$. C'est pourquoi les dimensions $\bar{L}_i$, $\bar{a}_i$, φ_i, pour chaque indice i, constituent six (et non sept!) grandeurs indépendantes, ce qui permet d'exprimer, grâce à elles et réciproquement, six grandeurs $\bar{r}_i$, $\bar{u}_i$. La transformation inverse de (13) s'effectue par les formules:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_i &= r_i[\cos\varphi_i\,\bar{\alpha}_i + \sin\varphi_i\,\bar{\beta}_i], \\ \bar{u}_i &= \frac{1}{L_i}[-\sin\varphi_i\,\bar{\alpha}_i + (a_i + \cos\varphi_i)\,\bar{\beta}_i], \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

où figurent les notations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} r_i &= \frac{L_i^2}{1 + a_i\cos\varphi_i}, \\ \bar{\alpha}_i &= \frac{1}{a_i}\bar{a}_i, \\ \bar{\beta}_i &= \frac{1}{L_i a_i}(\bar{L}_i \times \bar{a}_i). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Il n'y aurait aucun intérêt à exprimer tout le système des équations dans les nouvelles variables, puisque seules les équations des évolutions nous intéressent. C'est pourquoi nous ne ferons la transformation que pour les grandeurs $\bar{L}_i$, $\bar{a}_i$, qui constituent d'ailleurs le vecteur J dans le cas présent. On peut vérifier que ces équations sont de la forme:

$$\frac{d\bar{L}_i}{dt} = \varepsilon(\bar{r} \times \bar{F}_i), \tag{16}$$

$$\frac{d\bar{a}_i}{dt} = \varepsilon[2(\bar{u}_i,\, \bar{F}_i)\,\bar{r}_i - (\bar{r}_i,\, \bar{F}_i)\,\bar{u}_i - (\bar{r}_i,\, \bar{u}_i)\,\bar{F}_i]. \tag{17}$$

Nous introduirons alors les notations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_i &= \sum_{\varkappa \neq i} \Theta_\varkappa \bar{F}_{\varkappa i}, \\ \bar{F}_{\varkappa i} &= \frac{\bar{r}_\varkappa - \bar{r}_i}{|\bar{r}_\varkappa - \bar{r}_i|^3} - \frac{\bar{r}_\varkappa}{r_\varkappa^3} + \frac{\bar{r}_i}{r_i^3}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où il est sous-entendu que les grandeurs $\bar{r}_i$ et $\bar{u}_i$ doivent être exprimées en $\bar{L}_i$, $\bar{a}_i$, φ_i suivant les formules (14).

Notre problème est celui de l'étude du comportement du système durant les longues périodes. Précisons cette expression trop vague de « longues périodes ». Ainsi qu'il a été dit au § 1., l'existence d'un petit paramètre engendre différentes échelles de périodes. On peut parler de périodes de l'ordre d'une seule rotation. Dans de telles périodes, les corrections de l'ordre de ε sont petites, et négligeables. Pour des périodes de l'ordre de $1/\varepsilon$, le comportement du système est précisement défini par les petits termes de l'ordre de ε, mais les termes de l'ordre de ε^2 et davantage sont susceptibles d'être négligés. Si l'on prend comme exemple le système solaire, pour lequel $\varepsilon \sim 10^{-3}$, les périodes de l'ordre de $1/\varepsilon$ concernent des milliers de révolutions de Jupiter autour du Soleil, soit des dizaines de milliers d'années. Vraisemblablement, lorsque l'on examinera pour ce cas des périodes de l'ordre de $1/\varepsilon$ et $1/\varepsilon^2$, il sera judicieux de se limiter aux équations de la mécanique céleste. Mais, déjà, des périodes de l'ordre de $1/\varepsilon^3$, comparables à la durée de l'existence du système solaire, et par conséquent à l'approximation de la Mécanique céleste, peuvent être notoirement insuffisantes. Il est intéressant, en particulier, de noter que les corrections relativistes concernant le mouvement de Jupiter deviennent essentielles pour des périodes de l'ordre de $1/\varepsilon^3$. N'importe quel facteur qui n'a pas été retenu dans l'établissement des équations de la mécanique céleste (étendue des planètes, force des marées, champs magnétiques, etc.) doit être pris en compte dans le cadre de la théorie des perturbations, car ces facteurs y deviennent essentiels. Il est nécessaire de remarquer que le théorème du § 1. permet de tenir compte de tous ces facteurs indépendamment de leur origine, à condition de connaître les formules exprimant les forces correspondantes en fonction de la position et de la vitesse des planètes.

Tout en ne tenant pas compte des termes qu'on aura à évaluer, dans des problèmes à venir concernant la théorie des perturbations, la première démarche doit se tenir dans les limitations de la mécanique céleste. Le problème étudié dans le présent paragraphe consiste à déterminer quelques caractéristiques de l'équation du premier degré de l'évolution, selon la théorie des perturbations. On a vu au § 1. que, pour l'établissement de l'équation de l'évolution, il faut opérer la moyenne du membre de droite du système de départ, en fonction d'une mesure invariante. On peut vérifier que, dans notre cas, une mesure invariante est fournie par les différentielles d'anomalies moyennes. Si l'on préfère utiliser les anomalies réelles, on obtient la formule suivante:

$$d\mu = r_1^2 r_2^2 \dots r_n^2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \dots d\varphi_n. \tag{19}$$

Le premier résultat qui mérite d'être signalé se trouve établi lorsque, en présence d'équations exprimant les moyennes de (16) et (17) en des grandeurs $\overline{F}_{kt}$, on peut ne retenir que le premier terme, les deux autres étant de moyenne nulle. Ceci est particulièrement manifeste pour le terme $\bar{r}_\varkappa/\bar{r}_\varkappa^3$, étant donné qu'après l'avoir multiplié par $\bar{r}_\varkappa^2\, d\varphi_\varkappa$ on obtient $(\bar{r}_\varkappa/r_\varkappa)\, d\varphi_\varkappa$. Dans des intégrations par période, cette expresion fournit un résultat nul, comme on l'observe aisément dans la formule (14). Il est un peu plus difficile de vérifier que le terme $\bar{r}_i/\bar{r}_i^3$ peut être également tenu pour nul. Le calcul en est omis ici, en raison de son caractère élémentaire.

En tenant compte de cette remarque, le système d'évolution peut être exprimé de façon analogue au système (16), (17). Il faut toutefois noter que, dans les membres de droite, on peut substituer l'expression:

$$\bar{F}^*_{\varkappa i} = \frac{\bar{r}_\varkappa - \bar{r}_i}{|\bar{r}_\varkappa - \bar{r}_i|^3}\,. \tag{20}$$

Ensuite, ces membres de droite doivent être calculés en moyenne, pour les variables $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, avec un poids déterminé par la formule (19).

Puis, une fois les équations établies, on peut démontrer le très important théorème suivant:

Si tous les moments $\bar{L}_i$ sont parallèles, alors que les excentricités sont nulles, alors les membres de droite des équations des évolutions du premier ordre sont également nuls.

Cette affirmation se démontre aussi par quelques calculs dont la simplicité rend ici leur présentation superflue.

Il est facile de comprendre que le théorème précédent affirme le fait évolutionnaire important que voici:

Les systèmes planétaires plans et circulaires apparaissent stationnaires au premier ordre en ε.

En conclusion, nous remarquerons que, sur des machines à calculer perfectionnées, on peut aujourd'hui faire intégrer sans difficulté les équations évolutionnaires pour le cas d'un système de quelques planètes.

Les calculs, dans le cas de deux planètes, ont été effectués par Mademoiselle Valentina Nicolaevna Ivanov. L'angle formé entre les plans des premiers orbites est assez grand $\left(> \frac{\pi}{6}\right)$, et les excentricités assez importantes (~ 0.3). Il s'avère que, même dans ce cas, le système est très stable. Mademoiselle V. N. Ivanov a très aimablement fourni à l'auteur les calculs rassemblés dans les dix graphiques ci-joints. Si, pour unité de mesure, on choisit un ordre de grandeur caractéristique pour le système solaire, les calculs englobent une durée en temps réel supérieure à trois millions d'années.

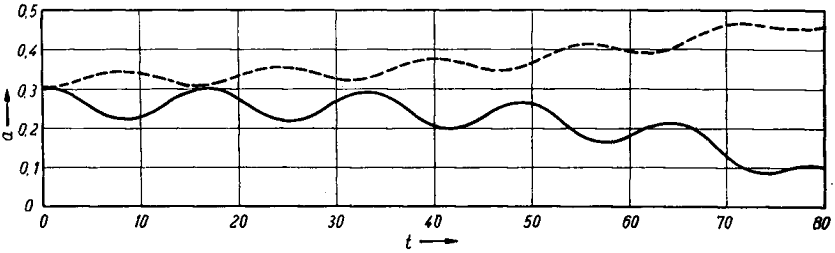

Fig. 1.

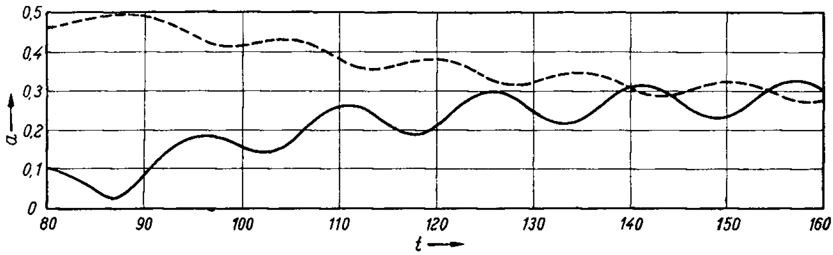

Fig. 2.

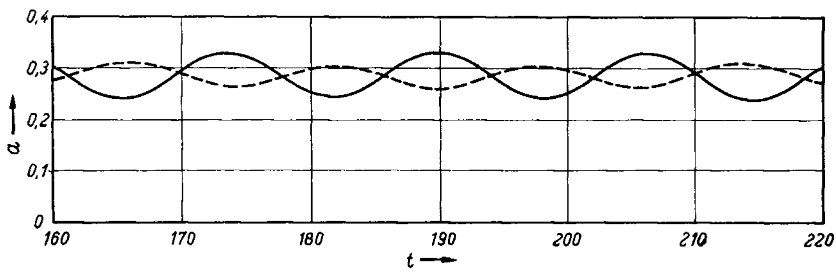

Fig. 3.

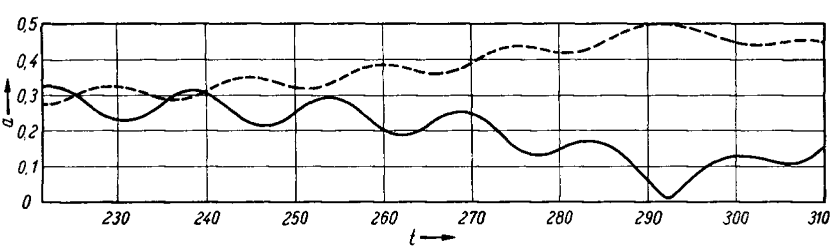

Fig. 4.

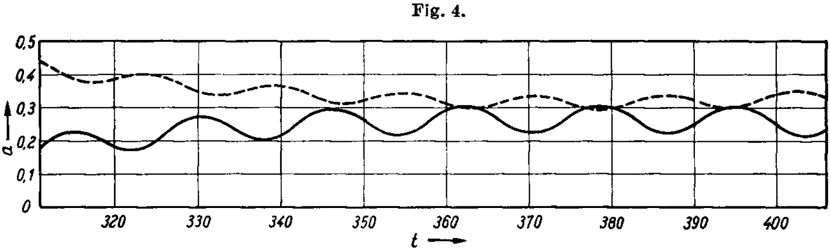

Fig. 5.

Fig. 1—5. Variation de l'éxcentricité en fonction du temps.

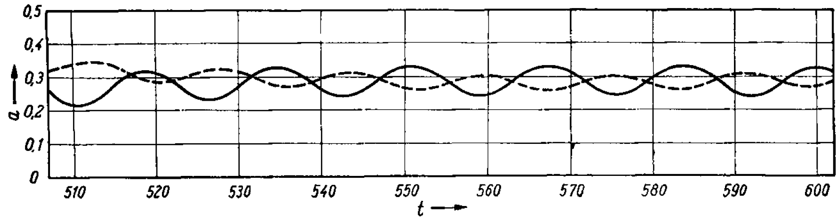

Fig. 6.

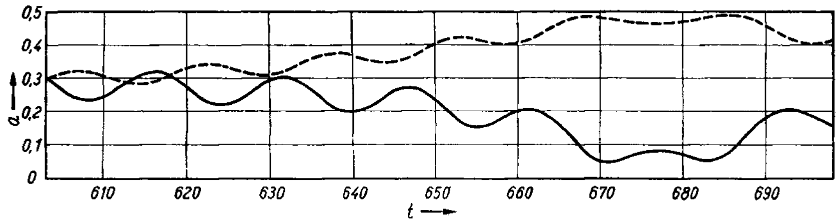

Fig. 7.

Fig. 6 et 7. Variation de l'éxcentricité en fonction du temps.

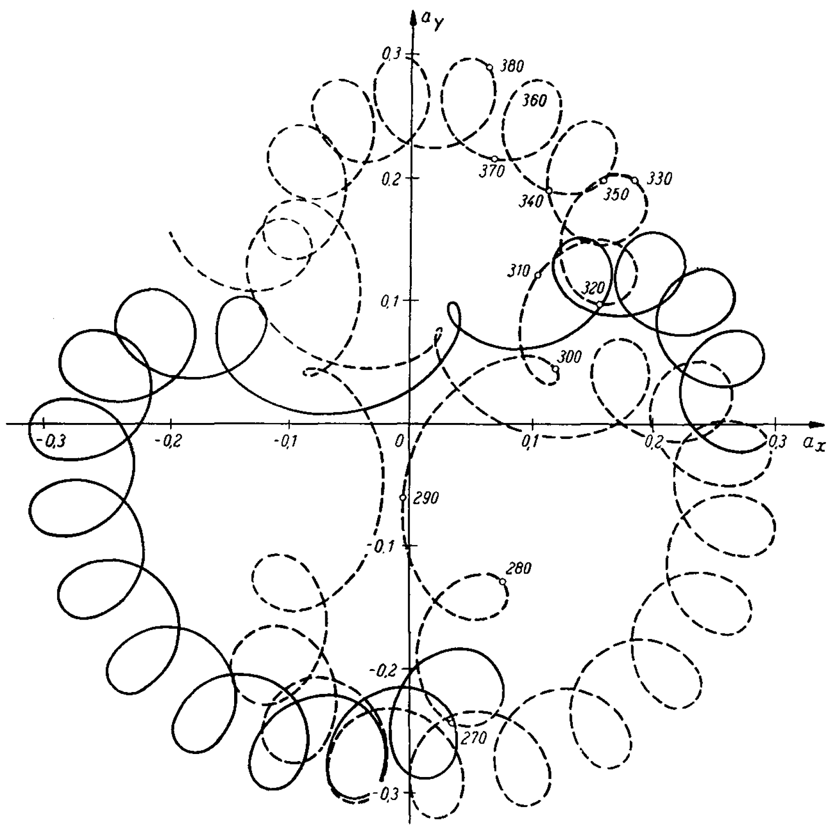

Fig. 8. Projection du vecteur de LAPLACE de „Jupiter" sur le plan invariant du système.

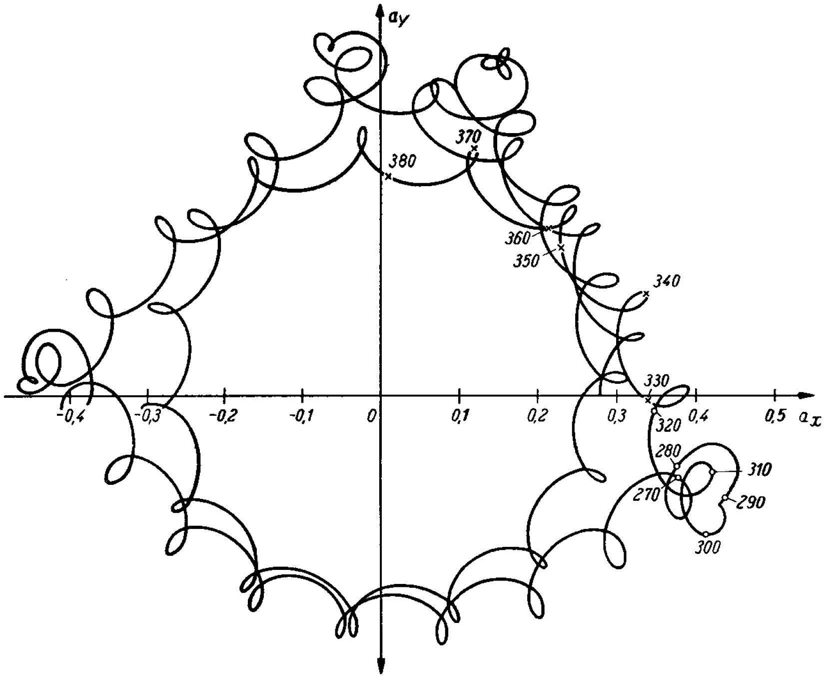

Fig. 9. Projection du vecteur de LAPLACE de „Saturne" sur le plan invariant du système.

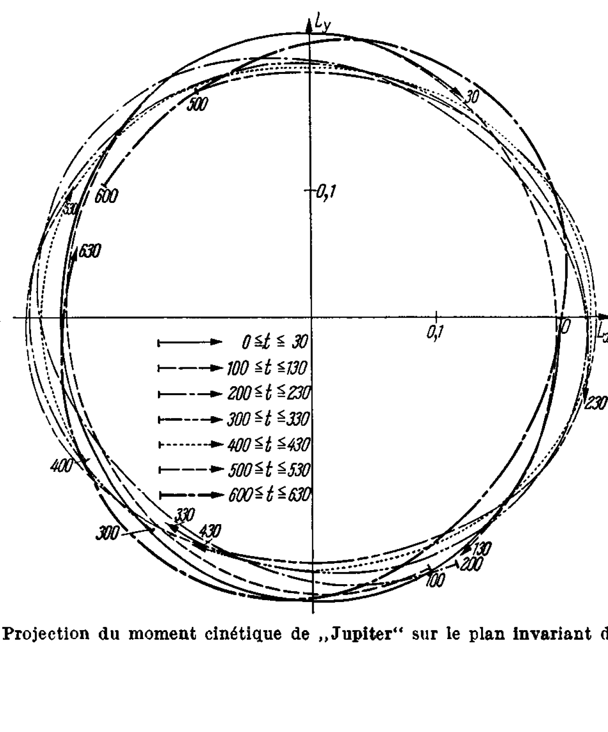

Fig. 10. Projection du moment cinétique de „Jupiter" sur le plan invariant du système.